数理解析研究所講究録
第2008巻 2016年 21-28

Cellular automaton and matrix over words

東洋大学　総合情報学部 佐藤　忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

1．まえがき

一次元セルオートマトンを議論するとき、局所関数を有向グラフで表現してその状態遷移行列を考え、その代数構造を調べることは重要である。この状態遷移行列の各要素はシンボルである。Q をシンボルからなる有限集合とすると Q 上の行列である。この行列の固有値、固有ベクトルを求めるためにはモノイド Q^* から複素数体 C 上の代数 $R(Q)$ を定義する必要がある。本論文ではワード上の行列の転置を定義することにより、複素数体 C 上の行列の自然な拡張である $R(Q)$ 上の行列のスペクトル分解を考える。

2．諸定義と基本的性質

1次元セルオートマトンは $<Z,Q,n,f>$ の4組で与えられる。ここで Z はセルが配置されているセル空間、Q は各オートマトンの状態を表す有限集合、n は近傍の個数（スコープ幅）、$f:Q^n \to Q$ は局所関数。写像 $c:Z \to Q$ を様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数 f で一斉に変換すると新しい様相 c' は次式で与えられる。

$$^{\forall}i \in Z\,,\ c'(i) = f(c(i), c(i+1), \cdots, c(i+|N|-1))$$

$c \to c'$ なる対応を $f_\infty(c) = c'$ と書く。f_∞ とシフト写像との合成を並列写像という。このとき次の関係が成立する。

並列写像は単射である　$\Leftrightarrow$　並列写像は逆変換を持つ

Q をシンボルからなる有限集合とし、Q^* を Q 上の長さ０以上のワードの集合とする。$w \in Q^*$ に対して $|w|$ **はワードの長さを表す。** $w_1, w_2 \in Q^*$ に対して加法、乗法を次のように定義する。$w_1 + w_2 \Leftrightarrow w_1$ または w_2 とする。加法の単位元を０で表し $-w$ を加法における逆元とする。加法はアーベル群である。乗法はワードの連接、乗法の単位元はヌルワード１である。乗法は結合の法則を満たし、更に加法との分配の法則を満たす。従って Q から非可換環 $R(Q)$ が自然に定義される。$^{\forall}a \in Q$ に対して $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ となる a^{-1} を定義する。C を複素数体とする。C の元の長さは０である。$^{\forall}w \in Q^*$ に対して w を反転させたワードを ${}^t w$ で表す。$^{\forall}r \in C, {}^{\forall}w \in Q^*$ に対して

rw を反転させたワードを ${}^t(rw) = \bar{r}\,{}^t w$ と定義する。ここで $\bar{r}$ は r と共役な複素数である。$^{\forall}r_1, r_2 \in C, {}^{\forall}w_1, w_2 \in Q^*$ に対して ${}^t(r_1w_1 + r_2w_2) = {}^t(r_1w_1) + {}^t(r_2w_2)$ と定義し、２つの列ベクトル u, v に対して内積を $< u, v > = {}^t uv$ と定義する。$z, w \in R(Q)$ に対して $w = z^n$ のとき $z = w^{1/n}$ と表す。$M_{m,n}(Q)$ で $R(Q)$ 上 $m \times n$ の行列の集合を表し、$M_n(Q)$ で $R(Q)$ 上 $n \times n$ の行列の集合を表す。

$A=\{w_{i,j}\}\in M_{m,n}$ に対して ${}^tA=\{{}^tw_{j,i}\}$ と定義する。

性質１．次の命題が成立する。

(1)　$w\in R(Q)$ に対して ${}^t(w^{1/n})=({}^tw)^{1/n}$

(2)　$w\in R(Q)$ が逆元をもつとき ${}^t(w^{-1})=({}^tw)^{-1}$

(3)　${}^\forall A,B\in M_n(Q)$ に対して ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$

局所関数 $f(x_1,\cdots,x_n):Q^n\to Q$ の有向グラフを次のように作る。

Q^{n-1} をノードの集合とし、ノード $x_1\cdots x_{n-1}$ からノード $x_2\cdots x_n$ へのエッジには $f(x_1,\cdots,x_n)$ を付ける。この有向グラフの遷移行列を $A(f)$ と書く。

3.　遷移行列の固有値と固有ベクトル

非ゼロの列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\lambda$ のとき λ を A の固有値、$\boldsymbol{v}$ を列固有ベクトルと言う。また非ゼロの行ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v}A=\lambda\boldsymbol{v}$ のとき λ を A の固有値、$\boldsymbol{v}$ を行固有ベクトルと言う

例１．$f(x,y,z)=x+y \quad \mathrm{mod}\,2$ をスコープ幅３の線形局所関数とする。

$0\leftrightarrow a,\ 1\leftrightarrow b$ で符号化すると状態遷移行列は

$$A_f=\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix},$$ f_∞ は２対１写像である。

A_f の固有値は $a+b, a-b, 0$ である。$a+b$ に対する列固有ベクトルを v_1 とし、行固有ベクトルを ${}^t u_1$ とする。$a-b$ に対する列固有ベクトルを v_2 とし行固有ベクトルを ${}^t u_2$ とする。0 に対する２つの列固有ベクトルを v_3, v_4 、行固有ベクトルを ${}^t u_3, {}^t u_4$ として以下のようにとる。

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1), \qquad {}^t u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \quad 1, \quad -1, \quad -1)$$

$${}^t u_3 = (a^{-1}, 0, -b^{-1}, 0), \qquad {}^t u_4 = (0, \quad b^{-1}, \quad 0, \quad -a^{-1})$$

これらの固有ベクトルの間には次式が成立する。

$${}^t u_1 v_1 = < u_1, v_1 > = a+b, \qquad {}^t u_2 v_2 = < u_2, v_2 > = a-b$$

$${}^t u_1 v_2 = < u_1, v_2 > = 0, \qquad {}^t u_2 v_1 = < u_2, v_1 > = 0$$

$$A_f = v_1 {}^t u_1 + v_2 {}^t u_2 \qquad (1)$$

したがって任意の正の整数 n に対して

$$A_f^{\ n} = v_1 {}^t u_1 (a+b)^{n-1} + v_2 {}^t u_2 (a-b)^{n-1}$$

$$\therefore tr A_f^{\ n} = (a+b)^n + (a-b)^n = 2(a^n + \cdots)$$

このことからも f_∞ は２対１写像である。

(1) 式は一種のスペクトル分解であるが行および列固有ベクトルが正規直交系をなしていない。これを正規直交系にしたい。このとき次の定理が成立する。

定理１． $A \in M_n(\Sigma)$ が n 個の列固有ベクトル $v_1, \cdots, v_n$ を持つとき

$P = (v_1, \cdots, v_n) \in M_n(\Sigma)$ が正則なら A は次式のようにスペクトル分解される。

$$A = \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i {}^t u_i$$

ここで　$Av_i = v_i \lambda_i (1 \le i \le n)$, $\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} \equiv (v_1, \cdots, v_n)^{-1}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} (v_1, \cdots, v_n) = \begin{pmatrix} < u_1, v_1 >, \cdots, < u_1, v_n > \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ < u_n, v_1 >, \cdots, < u_n, v_n > \end{pmatrix} = I$$

$$(v_1, \cdots, v_n) \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} = v_1 {}^t u_1 + \cdots + v_n {}^t u_n = I$$

例 2. $A_f = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}$ の正規直交系によるスペクトル分解

A_f の列固有ベクトルを $v_1, \cdots, v_n$ 次のように選んで行列 $(v_1, \cdots, v_n)$ を作る

$(v_1 \cdots v_4) = \begin{pmatrix} a & a & 1 & 0 \\ b & -b & -1 & 0 \\ b & b & 0 & 1 \\ a & -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$,　$\lambda = a + b$,　$\gamma = a - b$ とおいて

$$\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_4 \end{pmatrix} \equiv (v_1 \cdots v_4)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}\lambda^{-1} \\ \frac{1}{2}\gamma^{-1} & \frac{1}{2}\gamma^{-1} & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} & -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \\ 1-\frac{a}{2}(\gamma^{-1}+\lambda^{-1}) & \frac{-a}{2}(\gamma^{-1}+\lambda^{-1}) & \frac{a}{2}(\gamma^{-1}-\lambda^{-1}) & \frac{a}{2}(\gamma^{-1}-\lambda^{-1}) \\ -\frac{b}{2}(\gamma^{-1}+\lambda^{-1}) & -\frac{b}{2}(\gamma^{-1}+\lambda^{-1}) & 1+\frac{b}{2}(\gamma^{-1}-\lambda^{-1}) & \frac{b}{2}(\gamma^{-1}-\lambda^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_f = v_1 \lambda {}^t u_1 + v_2 \gamma {}^t u_2$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} (a+b) \left(\frac{1}{2}\lambda^{-1},\ \frac{1}{2}\lambda^{-1},\ \frac{1}{2}\lambda^{-1},\ \frac{1}{2}\lambda^{-1} \right) + \begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix} (a-b) \left(\frac{1}{2}\gamma^{-1},\ \frac{1}{2}\gamma^{-1},\ -\frac{1}{2}\gamma^{-1},\ -\frac{1}{2}\gamma^{-1} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \right) + \begin{pmatrix} a \\ -b \\ b \\ -a \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}$$

例３．$g(x,y) = 2x + y \quad \bmod 3$　をスコープ幅２の線形局所関数とする。

$0 \leftrightarrow a,\ 1 \leftrightarrow b,\ 2 \leftrightarrow c$ で符号化すると状態遷移行列 A_g は

$$A_g = \begin{pmatrix} a,b,c \\ c,a,b \\ b,c,a \end{pmatrix},$$ g_∞ は３対１写像である。

A_g の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると

$$\lambda_1 = a+b+c, \quad \lambda_2 = a + be^{i2\pi/3} + ce^{i4\pi/3}, \quad \lambda_3 = a + be^{i4\pi/3} + ce^{i2\pi/3}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の固有ベクトルをそれぞれ v_1, v_2, v_3 で表すと

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}e^{i2\pi/3}\\e^{i4\pi/3}\\1\end{pmatrix},\quad v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}e^{i4\pi/3}\\e^{i2\pi/3}\\1\end{pmatrix}$$

$$<v_i,v_j>\equiv{}^t v_i v_j=\delta_{i,j},\quad P\equiv(v_1,v_2,v_3),\ {}^tPP=I$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},\ A=P\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$$

例4． $h(x,y)=x+y \mod 3$ をスコープ幅２の線形局所関数とする。

$0\leftrightarrow a,\ 1\leftrightarrow b,\ 2\leftrightarrow c$ で符号化すると状態遷移行列 A_h は

$$A_h=\begin{pmatrix}a,b,c\\b,c,a\\c,a,b\end{pmatrix},$$ h_∞ は３対１写像である。

$$\lambda_1=a+b+c,\quad \lambda_2=a+be^{i2\pi/3}+ce^{i4\pi/3},\quad \lambda_3=a+be^{i4\pi/3}+ce^{i2\pi/3}$$

とおくと A_h の３つの固有値は $\lambda_1,\sqrt{\lambda_2\lambda_3},-\sqrt{\lambda_2\lambda_3}$ である。このとき ${}'(\lambda_1)=\lambda_2$, ${}'(\lambda_2)=\lambda_1$, したがって ${}'\sqrt{\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ が成立する。そして、それぞれの列固有ベクトルを以下のように v_1,v_2,v_3 とすると

$$v_{1,} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1\\ e^{i2\pi/3}\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+e^{i4\pi/3}\\ e^{i4\pi/3}\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+e^{i2\pi/3}\end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+1\\ -e^{i2\pi/3}\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+e^{i4\pi/3}\\ -e^{i4\pi/3}\lambda_1^{-1}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+e^{i2\pi/3}\end{pmatrix},$$

このとき $<v_i, v_j> \equiv {}^t v_i v_j = \delta_{i,j}$ なので $P \equiv (v_1, v_2, v_3)$ とおくと

${}^t PP = I$ が成立する。したがって、次式が成立する。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_1\lambda_2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\end{pmatrix},\ \therefore A = P\begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_1\lambda_2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\end{pmatrix}{}^t P$$

${}^t A = A$ であり、A は対称行列である。

注意１．複素数対上のエルミット行列の固有値は実数であるが、非可換環上の
対称行列の固有値は必ずしも実数値になるとは限らない。

参考文献

佐藤、「単射であるセルラーオートマトンの性質について」
RIMS 1915,158-160,2014